

Sulla riscrittura dei termini in presenza di effetti probabilistici

Stefano Volpe

Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

19 luglio 2023



Figura: Hogarth, William. *The Gaming House*. 1732-1734

- ① Riscrittura dei termini
 - Terminazione
 - Ordini di percorso lessicografici

- ② Riscrittura dei termini e probabilità
 - Terminazione quasi certa forte
 - Ordini probabilisticamente monotoni
 - PMO e SAST
 - PMO e LPO

Un altro modello di computazione **Turing-completo**:



Semplice e affine a **computazione simbolica** e **programmazione funzionale**.

Regole:

$$X + 0 \rightarrow X$$

$$X + S(Y) \rightarrow S(X + Y)$$

Regole:

$$X + 0 \rightarrow X$$

$$X + S(Y) \rightarrow S(X + Y)$$

Riduzione:

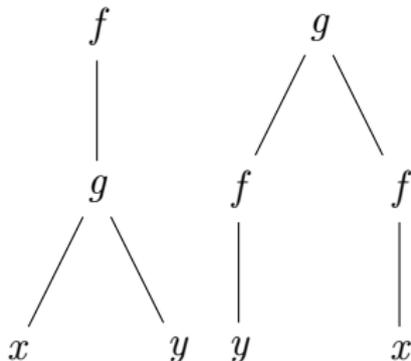
$$S(0) + S(S(0)) \rightarrow S(S(0) + S(0)) \rightarrow S(S(S(0) + 0)) \rightarrow S(S(S(0)))$$

Definizione

Un sistema di riscrittura dei termini (TRS) \rightarrow è **terminante** se non esiste alcuna catena infinita discendente $a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow \dots$.

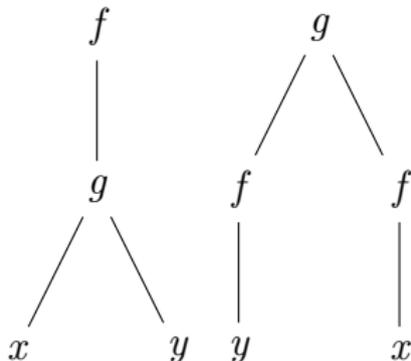
Ordini di percorso lessicografici (LPO)

Assumendo $f > g$, vale che $f(g(x, y)) >_{lpo} g(f(y), f(x))$:



Ordini di percorso lessicografici (LPO)

Assumendo $f > g$, vale che $f(g(x, y)) >_{lpo} g(f(y), f(x))$:



Teorema

Ogni LPO è terminante.

Regole:

```
1 fun silly 0 = 0
2   | silly (n + 1) =
3     if coinToss ()
4     then silly n
5     else n + 1;
```

Riscrittura dei termini e probabilità

Regole:

```
1 fun silly 0 = 0
2   | silly (n + 1) =
3     if coinToss ()
4     then silly n
5     else n + 1;
```

Riduzione:

$$\begin{aligned} \text{silly } 2 &\xrightarrow{+} \left\{ \frac{1}{2} : \text{silly } 1, \frac{1}{2} : 2 \right\} \xrightarrow{+} \left\{ \frac{1}{4} : \text{silly } 0, \frac{1}{4} : 1, \frac{1}{2} : 2 \right\} \xrightarrow{+} \\ &\xrightarrow{+} \left\{ \frac{1}{4} : 0, \frac{1}{4} : 1, \frac{1}{2} : 2 \right\} \end{aligned}$$

PTRS quasi certamente terminante forte

Definizione

Un sistema di riscrittura dei termini probabilistico (PTRS) \rightarrow è **quasi certamente terminante forte (SAST)** sse ogni termine ha altezza di derivazione attesa finita.

Ordini probabilisticamente monotoni (PMO)

Un PMO $\succ_{p\gamma}$ indotto da γ :

- 1 non si muove mai “controcorrente” rispetto a γ ;
- 2 si muove nello stesso senso di γ con probabilità $\geq \epsilon$.

```
1 fun silly 0 = 0
2   | silly (n + 1) =
3     if coinToss ()
4       then silly n
5       else n + 1;
```

Ordini probabilisticamente monotoni (PMO)

Un PMO $\succ_{p\gamma}$ indotto da γ :

- 1 non si muove mai “controcorrente” rispetto a γ ;
- 2 si muove nello stesso senso di γ con probabilità $\geq \epsilon$.

```
1 fun silly 0 = 0
2   | silly (n + 1) =
3     if coinToss ()
4     then silly n
5     else n + 1;
```

è un sottoinsieme del PMO $\succ_{p\gamma}$, con:

- 1 $\gamma =$ “ha altezza maggiore di”;
- 2 $\epsilon = \frac{1}{2}$.

Ordini probabilisticamente monotoni (PMO) via codifica

Un PMO $\succ_{p\gamma}, f$ indotto da \succ **via codifica** f :

- ① è sempre **non crescente rispetto a f** ;
- ② si muove nello stesso senso di \succ con probabilità $\geq \epsilon$.

```
1 fun geo n = if coinToss ()
2   then geo (n + 1)
3   else n;
```

Ordini probabilisticamente monotoni (PMO) via codifica

Un PMO $\succ_{p\gamma, f}$ indotto da \succ **via codifica** f :

- ① è sempre **non crescente rispetto a f** ;
- ② si muove nello stesso senso di \succ con probabilità $\geq \epsilon$.

```
1 fun geo n = if coinToss ()
2   then geo (n + 1)
3   else n;
```

è un sottoinsieme del PMO **via codifica** $\succ_{p\gamma, f}$, con:

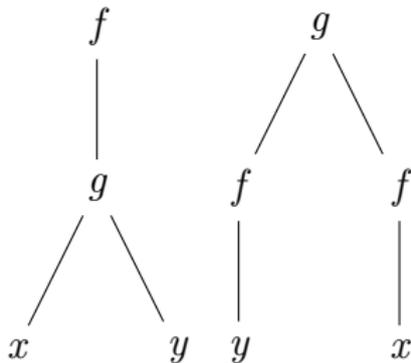
- ① $\gamma =$ “ha più occorrenze di `geo` rispetto a”;
- ② $f(s) =$ “il numero di occorrenze di `geo` in s ”;
- ③ $\epsilon = \frac{1}{2}$.

Teorema

Ogni PMO (con o senza codifica) è SAST.

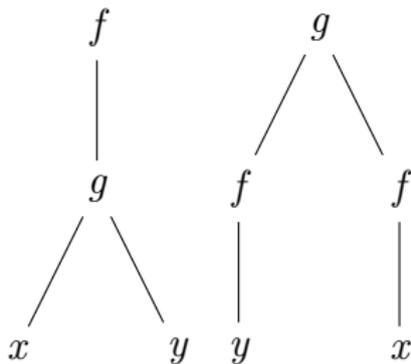
Ordini di percorso lessicografici (LPO)

Assumendo $f > g$, vale che $f(g(x, y)) >_{lpo} g(f(y), f(x))$:



Ordini di percorso lessicografici (LPO)

Assumendo $f > g$, vale che $f(g(x, y)) >_{lpo} g(f(y), f(x))$:



Teorema

Esistono LPO che non inducono PMO (né con né senza codifica).

Grazie!