Sulla riscrittura dei termini in presenza di effetti probabilistici

Stefano Volpe

Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

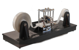
19 luglio 2023

Figura: Hogarth, William. *The Gaming House*. 1732-1734

Indice

Riscrittura dei termini (1)

Un altro modello di computazione **Turing-completo**:

 LaTeX    

Semplice e affine a **computazione simbolica** e **programmazione funzionale**.

Riscrittura dei termini (2)

Regole:

$$X + 0 \to X$$

$$X + S(Y) \to S(X + Y)$$

Regole:

$$X + 0 \rightarrow X$$

$$X + S(Y) \rightarrow S(X + Y)$$

Riduzione:

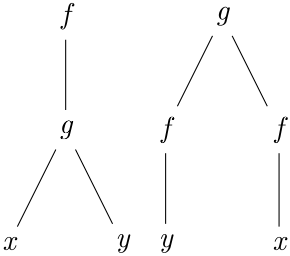
$$S(0) + S(S(0)) \rightarrow S(S(0) + S(0)) \rightarrow S(S(S(0) + 0)) \rightarrow S(S(S(0)))$$

Definizione

Un sistema di riscrittura dei termini (TRS) $\rightarrow$ è **terminante** sse non esiste alcuna catena infinita discendente $a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow \ldots$.

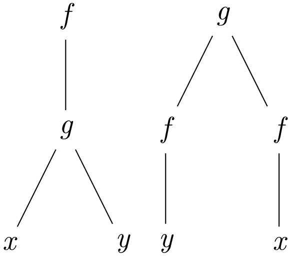
Ordini di percorso lessicografici (LPO)

Assumendo $f > g$, vale che $f(g(x,y)) >_{lpo} g(f(y), f(x))$:



Ordini di percorso lessicografici (LPO)

Assumendo $f > g$, vale che $f(g(x,y)) >_{lpo} g(f(y), f(x))$:



Teorema

Ogni LPO è terminante.

Regole:

```
fun silly 0 = 0
  | silly (n + 1) =
      if coinToss ()
        then silly n
        else n + 1;
```

Regole:

```
fun silly 0 = 0
  | silly (n + 1) =
      if coinToss ()
        then silly n
        else n + 1;
```

Riduzione:

$$\texttt{silly 2} \xrightarrow{+} \{\!\{\frac{1}{2} : \texttt{silly 1}, \frac{1}{2} : \texttt{2}\}\!\} \xrightarrow{+} \{\!\{\frac{1}{4} : \texttt{silly 0}, \frac{1}{4} : \texttt{1}, \frac{1}{2} : \texttt{2}\}\!\} \xrightarrow{+}$$

$$\xrightarrow{+} \{\!\{\frac{1}{4} : \texttt{0}, \frac{1}{4} : \texttt{1}, \frac{1}{2} : \texttt{2}\}\!\}$$

PTRS quasi certamente terminante forte

Definizione

Un sistema di riscrittura dei termini probabilistico (PTRS) $\rightarrow$ è **quasi certamente terminante forte (SAST)** sse ogni termine ha altezza di derivazione attesa finita.

Ordini probabilisticamente monotoni (PMO)

Un PMO $>_{p\succ}$ indotto da $\succ$:

1. non si muove mai "controcorrente" rispetto a $\succ$;
2. si muove nello stesso senso di $\succ$ con probabilità $\geq \epsilon$.

```
fun silly 0 = 0
  | silly (n + 1) =
      if coinToss ()
        then silly n
        else n + 1;
```

Ordini probabilisticamente monotoni (PMO)

Un PMO $>_{p\succ}$ indotto da $\succ$:

1. non si muove mai "controcorrente" rispetto a $\succ$;
2. si muove nello stesso senso di $\succ$ con probabilità $\geq \epsilon$.

```
fun silly 0 = 0
  | silly (n + 1) =
      if coinToss ()
        then silly n
        else n + 1;
```

è un sottoinsieme del PMO $>_{p\succ}$, con:

1. $\succ =$ "ha altezza maggiore di";
2. $\epsilon = \frac{1}{2}$.

Ordini probabilisticamente monotoni (PMO) via codifica

Un PMO $>_{p\succ,f}$ indotto da $\succ$ **via codifica** f:

1. è sempre **non crescente rispetto a** f;
2. si muove nello stesso senso di $\succ$ con probabilità $\geq \epsilon$.

```
fun geo n = if coinToss ()
  then geo (n + 1)
  else n;
```

Ordini probabilisticamente monotoni (PMO) via codifica

Un PMO $>_{p\succ,f}$ indotto da $\succ$ **via codifica** f:

1. è sempre **non crescente rispetto a** f;
2. si muove nello stesso senso di $\succ$ con probabilità $\geq \epsilon$.

```
fun geo n = if coinToss ()
  then geo (n + 1)
  else n;
```

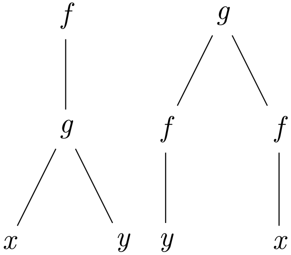
è un sottoinsieme del PMO **via codifica** $>_{p\succ,f}$, con:

1. $\succ =$ "ha più occorrenze di `geo` rispetto a";
2. $f(s) =$ "il numero di occorrenze di `geo` in s";
3. $\epsilon = \frac{1}{2}$.

Teorema
Ogni PMO (con o senza codifica) è SAST.

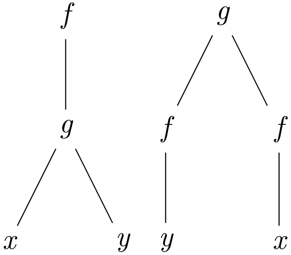
Ordini di percorso lessicografici (LPO)

Assumendo $f > g$, vale che $f(g(x,y)) >_{lpo} g(f(y), f(x))$:



Ordini di percorso lessicografici (LPO)

Assumendo $f > g$, vale che $f(g(x, y)) >_{lpo} g(f(y), f(x))$:



Teorema

Esistono LPO che non inducono PMO (né con né senza codifica).

Grazie!