

# Formalizzazione in logica modale $S5^n$ : MaskCharade, un caso di studio

Stefano Volpe

Università di Bologna

10 dicembre 2023

# Indice

Logiche epistemiche

$S5$

$S5^n$

$S5^n$  e Coq

$S5^n$  e Masquerade

Sì, ma il succo?

Materiale disponibile su [codeberg.org/foxy/mask-charade](https://codeberg.org/foxy/mask-charade).

# Table of Contents

Logiche epistemiche

$S5$

$S5^n$

$S5^n$  e Coq

$S5^n$  e Masquerade

Sì, ma il succo?

# Logiche epistemiche

L'operatore enunciativo "Tizio sa che" non è vero-funzionale:

Tabella: tentativo di costruzione di una tabella di verità per "Tizio sa che"

<b>A</b>	<b>Tizio sa che A</b>
F	F
V	?

# Logiche epistemiche

L'operatore enunciativo "Tizio sa che" non è vero-funzionale:

Tabella: tentativo di costruzione di una tabella di verità per "Tizio sa che"

<b>A</b>	<b>Tizio sa che A</b>
F	F
V	?

Le logiche epistemiche modellano questo operatore correttamente facendo uso degli strumenti della logica modale.

## Logiche epistemiche (2)

L'intuizione dietro a una struttura  $\langle W, R \rangle$  di una logica epistemica con un solo agente conoscitivo è che:

## Logiche epistemiche (2)

L'intuizione dietro a una struttura  $\langle W, R \rangle$  di una logica epistemica con un solo agente conoscitivo è che:

- ▶ ciascun elemento dell'insieme dei mondi  $W$  sia un possibile stato della realtà;

## Logiche epistemiche (2)

L'intuizione dietro a una struttura  $\langle W, R \rangle$  di una logica epistemica con un solo agente conoscitivo è che:

- ▶ ciascun elemento dell'insieme dei mondi  $W$  sia un possibile stato della realtà;
- ▶  $wRv$  vada interpretato come “se  $w$  è lo stato attuale della realtà, per il nostro agente conoscitivo  $v$  potrebbe essere lo stato attuale della realtà”.

## Logiche modali epistemiche (3)

Esempio: costruzione di una struttura per una logica epistemica

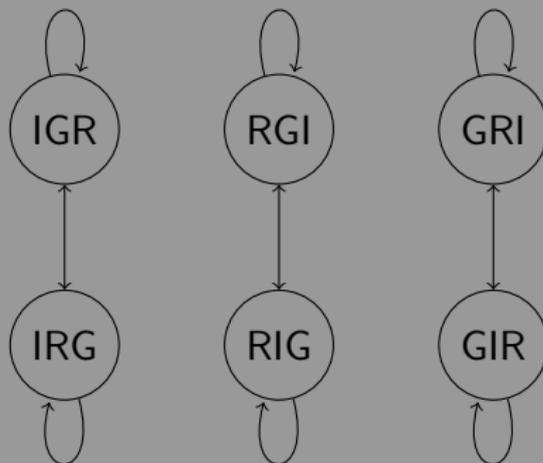
Siano l'Imperatrice, il Re e il Giudice tre carte distinte.

Consideriamo l'esperimento aleatorio che consiste nel mischiarle coperte, allinearle sul tavolo e scoprirne solo la prima.

# Logiche modali epistemiche (3)

Esempio: costruzione di una struttura per una logica epistemica

Siano l'Imperatrice, il Re e il Giudice tre carte distinte.  
Consideriamo l'esperimento aleatorio che consiste nel mischiarle coperte, allinearle sul tavolo e scoprirne solo la prima.





Dalle precedenti osservazioni segue che  $\models_w \Box A$  può essere letto come “Se  $w$  è lo stato attuale della realtà, allora  $A$  è vera in ogni stato della realtà che per il nostro agente conoscitivo potrebbe essere quello attuale” o, più brevemente, “Tizio sa che  $A$ ”.



Dalle precedenti osservazioni segue che  $\models_w \Box A$  può essere letto come “Se  $w$  è lo stato attuale della realtà, allora  $A$  è vera in ogni stato della realtà che per il nostro agente conoscitivo potrebbe essere quello attuale” o, più brevemente, “Tizio sa che  $A$ ”.

Identifichiamo quindi il nostro operatore di conoscenza con  $\Box$ .



Sappiamo già che  $\diamond$  è duale a  $\square$ . Quindi, avendo scelto di leggere  $\square A$  come “Tizio sa che A”,  $\diamond A$  può essere letto come “Tizio non sa che non A”, o più semplicemente “Tizio reputa possibile A”.

# Table of Contents

Logiche epistemiche

S5

$S5^n$

$S5^n$  e Coq

$S5^n$  e Masquerade

Sì, ma il succo?

La logica modale normale S5 è il più piccolo sottoinsieme di  $Fm^\Phi$  che:

1. contiene le tautologie classiche;
2. contiene tutte le istanze di K;
3. è chiuso sotto MP, N;
4. contiene tutte le istanze di T, B e 4.

# Il cubo delle logiche modali

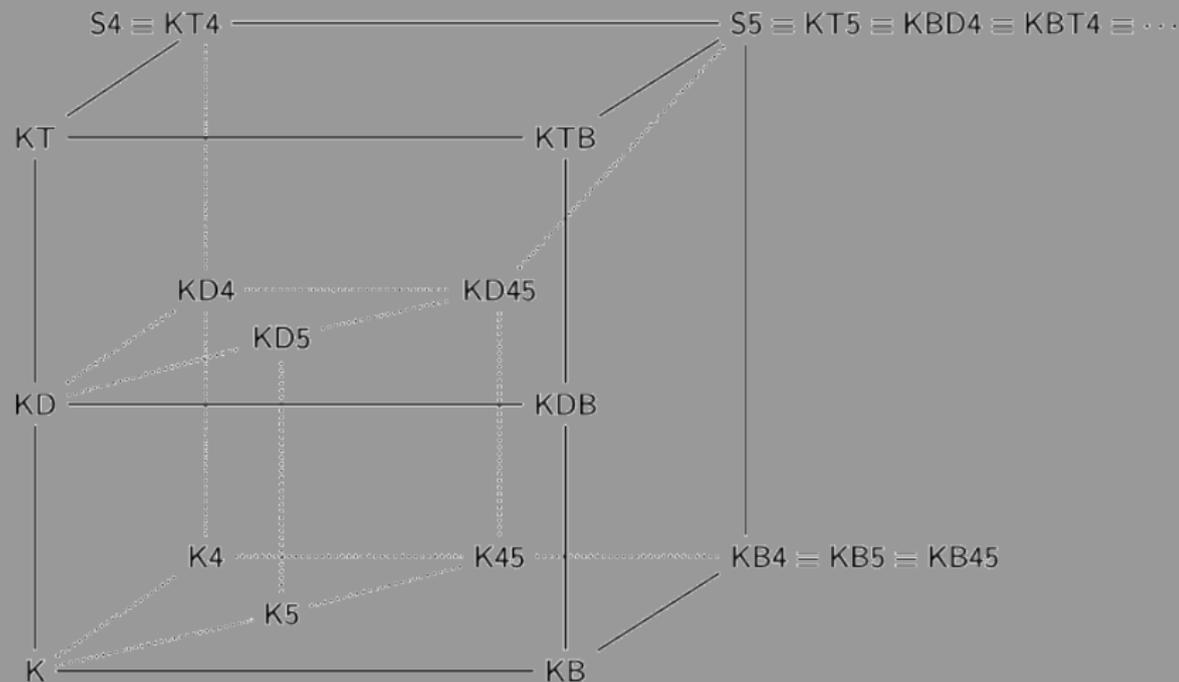


Figura: il cubo delle logiche modali.

$$K: \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$$

La nostra lettura dello schema D diventa “Se Tizio sa che A implica B, allora se Tizio sa che A Tizio sa anche che B”: K rappresenta quindi la capacità del nostro agente conoscitivo di applicare la regola *modus ponens* in modo puntuale all’interno di ciascun mondo.

# Necessitazione

Chiudere la nostra logica sotto necessitazione è importante perché permette di assumere che ogni formula valida sia nota al nostro agente conoscitivo. Le formule valide sono infatti vere a prescindere dallo stato attuale della realtà in cui il nostro agente conoscitivo si trova, e non ha quindi importanza se questi non lo sa indicare con certezza.

T:  $\Box A \rightarrow A$  (riflessività)

La nostra lettura dello schema T diventa “Se Tizio sa che A, allora si dà il caso che A”. La verità è in effetti condizione necessaria per la conoscenza: questo assioma è talvolta detto “assioma di verità”.

T:  $\Box A \rightarrow A$  (riflessività)

La nostra lettura dello schema T diventa “Se Tizio sa che A, allora si dà il caso che A”. La verità è in effetti condizione necessaria per la conoscenza: questo assioma è talvolta detto “assioma di verità”.

Lo schema di assioma T corrisponde alla proprietà della riflessività, che è di certo richiesta per una struttura epistemica. Infatti, non importa quale sia lo stato della realtà attuale: il nostro agente conoscitivo deve riconoscerlo almeno come possibile candidato per questo ruolo.

B:  $A \rightarrow \Box \Diamond A$  (simmetria)

Possiamo leggere lo schema B come “Se si dà il caso che A, allora Tizio sa che Tizio reputa possibile che A.”

B:  $A \rightarrow \Box \Diamond A$  (simmetria)

Possiamo leggere lo schema B come “Se si dà il caso che A, allora Tizio sa che Tizio reputa possibile che A.”

Lo schema B corrisponde alla proprietà di simmetria. Se in  $w$  l'agente epistemico reputa come possibile mondo attuale  $v$ , allora in  $v$  l'agente epistemico reputa come possibile mondo attuale  $w$ .

#### 4: $\Box A \rightarrow \Box \Box A$ (transitività)

La nostra lettura dello schema D diventa “Se Tizio sa che A, allora Tizio sa anche di sapere che Tizio sa che A.”. Questo non è nient’altro che il principio di introspezione epistemica positiva.

#### 4: $\Box A \rightarrow \Box \Box A$ (transitività)

La nostra lettura dello schema D diventa “Se Tizio sa che A, allora Tizio sa anche di sapere che Tizio sa che A.”. Questo non è nient’altro che il principio di introspezione epistemica positiva.

Lo schema di assioma 4 corrisponde alla proprietà della transitività, che è di certo richiesta per una struttura epistemica. Infatti, non importa quale sia lo stato della realtà attuale  $w$ : se in esso il nostro agente conoscitivo pensa che potrebbe trovarsi in  $v$ , e in  $v$  pensa di potersi trovare in  $u$ , allora in  $w$  pensa di certo di potersi trovare di  $u$ .

# R è una relazione di equivalenza

Una relazione che, come la relazione di accessibilità in  $S5$ , è riflessiva, simmetrica e transitiva si dice “di equivalenza” (es.  $=$ , “avere la stessa età”, “essere della stessa nazionalità”...).

# R è una relazione di equivalenza

Una relazione che, come la relazione di accessibilità in S5, è riflessiva, simmetrica e transitiva si dice “di equivalenza” (es. =, “avere la stessa età”, “essere della stessa nazionalità”...).

Una relazione di equivalenza induce sull’insieme sul quale essa è definita una ripartizione in classi dette “di equivalenza”.

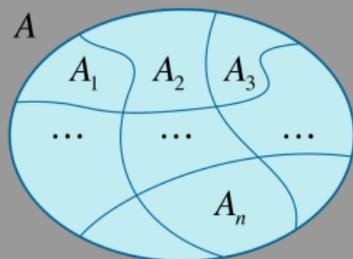


Figura: partizione di un insieme A

# Table of Contents

Logiche epistemiche

S5

$S5^n$

$S5^n$  e Coq

$S5^n$  e Masquerade

Sì, ma il succo?

Nel caso di più agenti epistemici, avremo una relazione di accessibilità per ciascuno di essi. Una struttura per la logica epistemica multiagente  $S5^n$  avrà quindi questo aspetto:

$$\langle W, (R_i)_{i \in A} \rangle$$

Anche gli operatori modali si moltiplicano di conseguenza:

$$(\Box_i)_{i \in A}$$

$$(\Diamond_i)_{i \in A}$$

A partire da questi, possiamo definire gli operatori epistemici del nostro linguaggio:  $(\mathcal{K}_i)_{i \in A}$ ,  $(\mathcal{E}_G)_{G \subseteq \mathcal{P}(A)}$ ,  $(\mathcal{C}_G)_{G \subseteq \mathcal{P}(A)}$  e  $(\mathcal{D}_G)_{i \subseteq \mathcal{P}(A)}$ .

$\mathcal{K}_i$ 

Operatore di conoscenza “semplice”:

$$\mathcal{K}_i A := \Box_i A$$

$\mathcal{E}_G$ 

Operatore di conoscenza condivisa:

$$\mathcal{E}_G A := \bigwedge_{i \in G} \mathcal{K}_i A$$

$\mathcal{C}_G$ 

Operatore ausiliario:

$$\mathcal{E}_G^i A := \begin{cases} A & \text{se } i = 0 \\ \mathcal{E}_G \mathcal{E}_G^{i-1} A & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Operatore di conoscenza comune:

$$\mathcal{C}_G A := \bigwedge_{i \in \mathbb{N}_+} \mathcal{E}_G^i A$$

L'operatore di conoscenza distribuita indica la sua formula immediata è deducibile a partire dalla combinazione di tutta la conoscenza dei membri del gruppo. Non è facilmente definibile in funzione degli altri operatori epistemici.

Esempio: alleanza fra giocatori al tavolo.

Siano l'Imperatrice, il Re e il Giudice tre carte distinte. Esse sono distribuite coperte a tre giocatori distinti, e ciascuno può guardare solo la propria carta. Se anche solo due giocatori si alleano, essi conoscono immediatamente le carte dell'intero tavolo.

# Table of Contents

Logiche epistemiche

$S5$

$S5^n$

$S5^n$  e Coq

$S5^n$  e Masquerade

Sì, ma il succo?

# Dimostratori automatici/interattivi di teoremi

Un dimostratore **automatico** di teoremi (1954) è un applicativo che, fornito un enunciato, ne fornisce una dimostrazione (o un contromodello).

# Dimostratori automatici/interattivi di teoremi

Un dimostratore **automatico** di teoremi (1954) è un applicativo che, fornito un enunciato, ne fornisce una dimostrazione (o un contromodello).

Un dimostratore **interattivo** di teoremi o “assistente dimostratore” (1967) è un applicativo fornisce un aiuto all’umano che sta svolgendo la dimostrazione (vedremo come). Per esempio, l’Università di Bologna ha sviluppato Matita.

# Dimostratori automatici/interattivi di teoremi

Un dimostratore **automatico** di teoremi (1954) è un applicativo che, fornito un enunciato, ne fornisce una dimostrazione (o un contromodello).

Un dimostratore **interattivo** di teoremi o “assistente dimostratore” (1967) è un applicativo fornisce un aiuto all’umano che sta svolgendo la dimostrazione (vedremo come). Per esempio, l’Università di Bologna ha sviluppato Matita.

Noi useremo Coq 8.16.1, un dimostratore interattivo sviluppato in Francia dall’Inria.



Figura: logo di Coq

# $S5^n$ e Coq

Il formalismo usato da Coq è il calcolo delle costruzioni induttive (calcolo lambda tipato di ordine superiore). Questo formalismo, allo scopo di essere il più essenziale possibile, non incorpora la logica modale, ma è abbastanza espressivo da contenere quella del prim'ordine.

# $S5^n$ e Coq

Il formalismo usato da Coq è il calcolo delle costruzioni induttive (calcolo lambda tipato di ordine superiore). Questo formalismo, allo scopo di essere il più essenziale possibile, non incorpora la logica modale, ma è abbastanza espressivo da contenere quella del prim'ordine.

Nella sua tesi triennale a Radboud, Michiel Philipse usa Coq come metalinguaggio per formalizzare  $S5^n$  al prim'ordine.

# Table of Contents

Logiche epistemiche

$S5$

$S5^n$

$S5^n$  e Coq

$S5^n$  e Masquerade

Sì, ma il succo?

# MaskCharade



Figura: la seconda edizione del gioco da tavolo Mascarade

# Table of Contents

Logiche epistemiche

$S5$

$S5^n$

$S5^n$  e Coq

$S5^n$  e Masquerade

Sì, ma il succo?

# Giochi da tavolo

I giochi da tavolo sono di rado analizzati in modo formale. Questo è un peccato, perché sono:

- ▶ divertenti;
- ▶ strumenti didattici;
- ▶ potenziali casi di studio in teoria dei giochi, psicologia e scienze del dibattito.

Al di là di questo singolo caso di studio, però, questa minuscola presentazione vuole anche essere un prototipo costellato di “buone abitudini” per un progetto di logica.

# Gli assistenti interattivi non sono una “diavoleria moderna”

Per logici, matematici e informatici, sono:

- ▶ frutto di più di mezzo secolo di ricerca;

# Gli assistenti interattivi non sono una “diavoleria moderna”

Per logici, matematici e informatici, sono:

- ▶ frutto di più di mezzo secolo di ricerca;
- ▶ uno strumento didattico che fa la differenza;

# Gli assistenti interattivi non sono una “diavoleria moderna”

Per logici, matematici e informatici, sono:

- ▶ frutto di più di mezzo secolo di ricerca;
- ▶ uno strumento didattico che fa la differenza;
- ▶ un modo di dare ai propri enunciati e alle proprie prove più rigosità;

# Gli assistenti interattivi non sono una “diavoleria moderna”

Per logici, matematici e informatici, sono:

- ▶ frutto di più di mezzo secolo di ricerca;
- ▶ uno strumento didattico che fa la differenza;
- ▶ un modo di dare ai propri enunciati e alle proprie prove più rigosità;
- ▶ controllori di correttezza migliori delle loro controparti umane;

# Gli assistenti interattivi non sono una “diavoleria moderna”

Per logici, matematici e informatici, sono:

- ▶ frutto di più di mezzo secolo di ricerca;
- ▶ uno strumento didattico che fa la differenza;
- ▶ un modo di dare ai propri enunciati e alle proprie prove più rigosità;
- ▶ controllori di correttezza migliori delle loro controparti umane;
- ▶ un modo di standardizzare i formalismi usati (se non è riproducibile, non è scienza).

# No, neanche i linguaggi di programmazione sono “tutti uguali”

Se vi troverete mai a scrivere codice, fate sì che il linguaggio scelto:

- ▶ abbia proprietà logiche e matematiche desiderabili (es. trasparenza referenziale);

# No, neanche i linguaggi di programmazione sono “tutti uguali”

Se vi troverete mai a scrivere codice, fate sì che il linguaggio scelto:

- ▶ abbia proprietà logiche e matematiche desiderabili (es. trasparenza referenziale);
- ▶ usi costrutti giustificati dai risultati dei logici e dei matematici;

# No, neanche i linguaggi di programmazione sono “tutti uguali”

Se vi troverete mai a scrivere codice, fate sì che il linguaggio scelto:

- ▶ abbia proprietà logiche e matematiche desiderabili (es. trasparenza referenziale);
- ▶ usi costrutti giustificati dai risultati dei logici e dei matematici;
- ▶ abbia una sintassi e una semantica formalizzate.

# Fate ricerca accademica, piuttosto che compiti a casa

E cioè:

- ▶ quando il contesto lo permette, usate la lingua inglese;

# Fate ricerca accademica, piuttosto che compiti a casa

E cioè:

- ▶ quando il contesto lo permette, usate la lingua inglese;
- ▶ non reinventate la ruota;

# Fate ricerca accademica, piuttosto che compiti a casa

E cioè:

- ▶ quando il contesto lo permette, usate la lingua inglese;
- ▶ non reinventate la ruota;
- ▶ se scrivete codice, non createlo monolitico (*standalone*);

# Fate ricerca accademica, piuttosto che compiti a casa

E cioè:

- ▶ quando il contesto lo permette, usate la lingua inglese;
- ▶ non reinventate la ruota;
- ▶ se scrivete codice, non createlo monolitico (*standalone*);
- ▶ rendete il vostro lavoro disponibile in rete (se possibile gratuitamente) a chi verrà dopo di voi.

- [1] Orlandelli Eugenio. *Corso di logica modale proposizionale / Eugenio Orlandelli, Giovanna Corsi*. ita. Roma: Carocci, 2019. ISBN: 978-88-430-9526-1.
- [2] Frixione Marcello. *Introduzione alle logiche modali / Marcello Frixione, Samuele Iaquinto, Massimiliano Vignolo*. ita. Roma Bari: Laterza, 2016. ISBN: 978-88-581-2456-7.
- [3] Philipse Michiel. «Distributed Knowledge Proofs in the Coq Proof Assistant». Radboud University. URL: <https://gitlab.science.ru.nl/mphilipse/coq-multi-agent-systems>.